УДК 539.3

ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ: О ЕДИНОЙ ПРИРОДЕ АДГЕЗИОННЫХ И РЕБЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ*

П.А. Белов, В.А. Нелюб

(МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5,
e-mail: BelovPA@yandex.ru)

В работе развивается теория сред с полями сохраняющихся дислокаций. Сформулированы две теоремы относительно слагаемых потенциальной энергии адгезии тела, с помощью которых удается сократить количество «существенных» адгезионных модулей. Дается объяснение как единой природы адгезионных и «реберных» взаимодействий, так и их несводимость друг к другу. Предложена прикладная теория градиентной адгезии, пригодная для инженерных приложений.

Ключевые слова: *механика дефектных сред, поля сохраняющихся дислокаций, масштабные эффекты, наномеханика, когезионные взаимодействия, адгезионные взаимодействия, теория межфазного слоя, композиты, неклассические упругие характеристики*

Введение

Повышенный интерес к градиентным теориям в последнее время обусловлен потребностью в последовательных моделях механики

* Отдельные результаты настоящей работы получены при финансовой поддержке по ГК 16.523.11.3012.

сплошной среды, способных описать масштабные эффекты. Области приложения таких моделей – теория тонких пленок, мелкодисперсные композиты, нанокомпозиты и теория трещин. В отличие от классической механики сплошной среды, в наномеханике (градиентных теориях) в потенциальной энергии учитываются не только деформации, но и их производные. Учет градиентов деформаций позволяет изучать масштабные эффекты (зависимость от абсолютного размера), что классические модели механики сплошной среды не могут описать в принципе. Это особенно важно для тонких пленок, в том числе и клеевых. Характерным признаком всех градиентных моделей является наличие в соответствующей теории модулей упругих свойств различной физической размерности, отличающихся от размерности классических модулей упругости [Па] на целую степень длины. Так, в теории идеальной адгезии [1] появляются неклассические модули адгезионных свойств размерности [Па·м], в теориях когезионных взаимодействий [2, 3] – неклассические модули когезионных свойств размерности [Па·м^2], в теории градиентной адгезии [4] – неклассические модули адгезионных свойств размерности [Па·м^3]. Уже из анализа размерностей неклассических физических параметров (модулей) следует, что наиболее существенные поправки в классическую механику вносят адгезионные свойства поверхности тела. В упомянутых выше работах модели адгезии строились из следующих физических соображений: есть тело, обладающее соответствующей поверхностью. Адгезионные взаимодействия двух тел определяются разностью поверхностных свойств каждого тела в отдельности. Поверхностные свойства каждого отдельного тела определяются соответствующей энергией – интегралом по поверхности от соответствующей плотности потенциальной энергии. Здесь уместна аналогия между потенциальной энергией деформации тела, напряжениями, деформациями, модулями в объеме тела (упругие взаимодействия) и аналогичными величинами на поверхности (адгезионные взаимодействия). Каждое тело обладает своими упругими (в объеме) и адгезионными (на поверхности) характеристиками, определяемыми экспериментально. Все эти характеристики названы модулями (упругими и адгезионными).

Одновременно и достоинством, и недостатком всех градиентных теорий является большое количество неклассических модулей, подлежащих экспериментальному определению. Достоинством является многообразие физических свойств и явлений, которые могут быть предсказаны такими теориями. Недостатком – необходимость большого и дорогостоящего объема экспериментальных работ по определению численных значений неклассических модулей, определяющих соответствующие неклассические эффекты. Поэтому, корректное, теоретически обоснованное сокращение количества неклассических модулей является актуальной задачей. В данной статье развивается общая теория сред с полями сохраняющихся дислокаций [4]. Принципиальным отличием этой теории как раз и является учет в лагранжиане обобщенной модели потенциальных энергий поверхности (энергии адгезионных взаимодействий), ребер поверхности и угловых точек ребер поверхности. Учет таких слагаемых в потенциальной энергии адгезии, как взаимодействия кривизн и дисторсий, позволил доказать теорему о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий и их несводимости друг к другу, которая не может быть даже сформулирована в рамках «классических» моделей Миндлина [5] и Тупина [6] в силу того, что в них не определены адгезионные взаимодействия. В данной статье аналогичный подход применен к некоторым слагаемым потенциальной энергии адгезии, что привело к теоретически обоснованному сокращению количества адгезионных модулей. Теоретически обоснованное сокращение количества неклассических модулей позволяет существенно сократить объем экспериментальных работ по определению величин неклассических модулей для конкретного материала, что является несомненным практическим результатом этой работы.

Вариационная постановка

В [4] построена общая теория сред с полями сохраняющихся дислокаций. Лагранжиан L теории имеет вид:

$$L = A - U = A - \int U_V dV - \oint U_F dF - \sum \oint U_S ds - \sum U_P, \tag{1}$$

где A – работа внешних объемных и поверхностных сил; U_V – объемная плотность потенциальной энергии, dV – элемент объем тела; U_F – поверхностная плотность потенциальной энергии (энергии адгезии), dF - элемент поверхности тела; U_S – погонная плотность потенциальной энергии ребер; ds – элемент длины ребра на поверхности тела, U_P – потенциальная энергия угловых точек;

$$U_V = U_V(D^1_{ij}, D^2_{ij}, D^1_{ij,n}, D^2_{ij,r}); \tag{2}$$

$$U_F = U_F(D^1_{ij}, D^2_{ij}, D^1_{ij,q}\delta^*_{qn}, D^2_{ij,k}\delta^*_{qn}); \tag{3}$$

$$U_S = U_S(D^1_{ij}, D^2_{ij}, D^1_{ij,m}s_m, D^2_{ij,m}s_m); \tag{4}$$

$$U_P = U_P(D^1_{ij}, D^2_{ij}). \tag{5}$$

Здесь D^1_{ij}, D^2_{ij} – кинематические переменные второго ранга, которые в [7, 8] трактовались соответственно как интегрируемая (стесненная, сорт-1) и неинтегрируемая (свободная, сорт-2) дисторсии. Под дисторсией D^1_{ij}

понимается тензор всех первых производных от вектора перемещений. При этом его симметричная часть является тензором интегрируемых (совместных) деформаций, а антисимметричная – тензором поворотов. Под дисторсией D_{ij}^2 понимается тензор второго ранга, который нельзя представить в виде первых производных от вектора перемещений, так как его симметричная часть является тензором неинтегрируемых (несовместных) деформаций, а антисимметричная – тензором неинтегрируемых поворотов, которые нельзя представить в виде вихрей перемещений; D_{ijn}^1, D_{ijn}^2 – кинематические переменные третьего ранга, которые в [7, 8] трактовались соответственно как кривизны двух сортов: градиенты интегрируемой и неинтегрируемой дисторсии; δ_{ij} – тензор Кронекера; $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ – «плоский» тензор Кронекера, определенный на поверхности тела с ортом нормали n_i; s_i– орт касательной к ребру поверхности, если таковое имеется. Верхние индексы кинематических переменных являются номером сорта переменных. Понятие сорта введено в [8]. Необходимость учитывать дефекты сплошной среды, существование в материале дислокаций, дисклинаций и дефектов более высокого ранга связана с неидеальностью материала. Любое мелкодисперсное загрязнение или искусственно веденная добавка могут быть истолкованы как дислокация замещения. Поэтому деформации сорта-1 не связаны с дислокациями, а деформации сорта-2 связаны с дислокациями и отражают влияние дефектности на напряженно-деформированное состояние тела. Поля дислокаций определяют масштабные эффекты на наноуровне. Клеи относятся к типичным коллоидным системам, что обусловлено ограниченной взаимной растворимостью их компонентов. Это приводит к тому, что уже на стадии приготовления выделяются коллоидно-дисперсные фазы сложного состава, поэтому клей следует рассматривать как сложный мелкодисперсный композит, учет дефектности (за счет коллоидных частиц) которого является существенным. Коллоидные частицы определяют масштабные эффекты еще на микроуровне (мезоуровне), поэтому в клеях масштабные эффекты начинают проявляться еще раньше, чем в традиционных материалах.

В соответствии с [7, 8] между кинематическими переменными установлены соотношения типа Коши:

$$D_{ij}^1 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j}, \quad D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = R_{i,jk}, \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} = D_{ij,k}^2, \tag{6}$$

где R_i – непрерывная часть вектора перемещений. Соотношения (6) в совокупности определяют кинематическую модель изучаемой среды.

Для каждой плотности потенциальной энергии выведены свои формулы Грина, определяющие силовые факторы, соответственно, в объеме тела, на поверхности, ребрах и в угловых точках. В данной работе приводится только силовая модель адгезионных взаимодействий, необходимая для дальнейших доказательств. Для силовых факторов на поверхности среды формулы Грина дают определения адгезионных напряжений двух сортов – a_{ij}^1, a_{ij}^2 и адгезионных моментных напряжений двух сортов – a_{ijk}^1, a_{ijk}^2:

$$a_{ij}^1 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^1}, \quad a_{ij}^2 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^2}, \quad a_{ijk}^1 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijk}^1}, \quad a_{ijk}^2 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijk}^2}. \tag{7}$$

Для силовых факторов на ребрах поверхности среды:

$$b_{ij}^1 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ij}^1}, \quad b_{ij}^2 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ij}^2}, \quad B_{ij}^1 = \frac{\partial U_S}{\partial (D_{ijn}^1 s_n)}, \quad B_{ij}^2 = \frac{\partial U_S}{\partial (D_{ijn}^2 s_n)}. \tag{8}$$

В предположении физической линейности уравнений закона Гука поверхностная плотность потенциальной энергии U_F была построена как положительно определенная трансверсально-изотропная квадратичная форма своих аргументов [4]:

$$2U_F = A^{ab}_{ijmn} D^a_{in} D^b_{jm} + 2A^{ab}_{nmij} D^a_{im} D^b_{jm} + A^{ab}_{nlj} D^a_{lki} D^b_{jmk}\,. \tag{9}$$

Тензоры адгезионных модулей четвертого ранга A^{ab}_{ijmn} были построены в [1] в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера $\delta^*_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Их общая структура имеет вид:

$$\begin{aligned} A^{ab}_{ijmn} = {} & \lambda^{abF} \delta^*_{ij} \delta^*_{mn} + (\mu^{abF} + \chi^{abF}) \delta^*_{im} \delta^*_{jn} + (\mu^{abF} - \chi^{abF}) \delta^*_{in} \delta^*_{jm} + \\ & + \alpha^{ab} (n_i n_n \delta^*_{jm} + n_m n_j \delta^*_{in}) + \beta^{ab} (n_i n_j \delta^*_{mn} + n_m n_n \delta^*_{ij}) + \\ & + \delta^{ab} n_i n_m \delta^*_{jn} + B^{ab} \delta^*_{im} n_j n_n + A^{ab} n_i n_j n_m n_n , \end{aligned} \tag{10}$$

где адгезионные модули λ^{abF}, μ^{abF}, χ^{abF}, α^{ab}, β^{ab}, δ^{ab}, B^{ab} и A^{ab} являются физическими параметрами среды и определяются экспериментально. Здесь следует сделать небольшое «лирическое отступление». Основной акцент в этой статье сделан на математическое и физическое обоснование сокращения количества физических параметров материала (модулей) и упругих, и адгезионных. Важно не «выплеснуть с обмылками ребенка», потому что каждый физический параметр отражает какое-то физическое свойство, еще не изученное. И сокращение количества модулей должно быть осуществлено крайне осторожно, аккуратно и обоснованно. С другой стороны, очень большое количество неизученных модулей влечет за собой значительный объем экспериментальных работ по определению их численных значений. Это – вещь дорогостоящая и требует длительного времени, нестандартного оборудования, высокой квалификации. Поэтому видится единственный путь в решении этой проблемы – чисто теоретически исследовать эффекты, связанные с неклассическими модулями, и делать хотя бы качественные оценки: при каких условиях эти эффекты существенны, а при каких – нет, при каких условиях допустимо, а при каких – нет пренебрегать теми или иными свойствами и соответствующими модулями.

Вернемся к описанию структур тензоров модулей. Тензоры адгезионных модулей пятого ранга A^{ab}_{ijmnl} были построены в виде разложения по базисным тензорам пятого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера δ^*_{ij} и/или векторов единичной нормали к поверхности n_i со всеми возможными перестановками индексов:

$$\begin{aligned}A^{ab}_{ijmnl} = {} & G^{ab}_1 n_i \delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + G^{ab}_2 n_i \delta^*_{jn}\delta^*_{lm} + G^{ab}_3 n_i \delta^*_{jl}\delta^*_{mn} + \\ & + G^{ab}_4 n_j \delta^*_{im}\delta^*_{nl} + G^{ab}_5 n_j \delta^*_{in}\delta^*_{lm} + G^{ab}_6 n_j \delta^*_{il}\delta^*_{mn} + \\ & + G^{ab}_7 n_m \delta^*_{ji}\delta^*_{nl} + G^{ab}_8 n_m \delta^*_{jn}\delta^*_{li} + G^{ab}_9 n_m \delta^*_{jl}\delta^*_{in} + \\ & + G^{ab}_{10} n_n \delta^*_{jm}\delta^*_{il} + G^{ab}_{11} n_n \delta^*_{ji}\delta^*_{lm} + G^{ab}_{12} n_n \delta^*_{jl}\delta^*_{mi} + \\ & + G^{ab}_{13} \delta^*_{il} n_j n_m n_n + G^{ab}_{14} \delta^*_{jl} n_i n_m n_n + G^{ab}_{15} \delta^*_{ml} n_i n_j n_n + G^{ab}_{16} \delta^*_{nl} n_i n_j n_m ,\end{aligned} \tag{11}$$

здесь модули G^{ab}_i $(i = 1,...,16)$ являются физическими параметрами среды и определяются экспериментально.

Тензоры модулей шестого ранга A^{ab}_{ijkmnl} были построены в [4] в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера δ^*_{ij} и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Их общая структура имеет вид:

$$
\begin{aligned}
A^{ab}_{ijkmnl} = {} & A^{ab}_{1}(\delta^*_{ij}\delta^*_{km}\delta^*_{nl} + \delta^*_{mn}\delta^*_{li}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_{2}(\delta^*_{ij}\delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{mn}\delta^*_{lj}\delta^*_{ik}) + \\
& + A^{ab}_{3}(\delta^*_{ik}\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + \delta^*_{ml}\delta^*_{ni}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_{4}(\delta^*_{in}\delta^*_{km}\delta^*_{jl} + \delta^*_{mj}\delta^*_{li}\delta^*_{nk}) + \\
& + A^{ab}_{5}\delta^*_{ij}\delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + A^{ab}_{6}\delta^*_{ik}\delta^*_{jn}\delta^*_{ml} + A^{ab}_{7}\delta^*_{im}\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + A^{ab}_{8}\delta^*_{im}\delta^*_{nj}\delta^*_{kl} + \\
& + A^{ab}_{9}\delta^*_{im}\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + A^{ab}_{10}\delta^*_{in}\delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + A^{ab}_{11}\delta^*_{il}\delta^*_{km}\delta^*_{nj} + \\
& + A^{ab}_{12}(n_i n_j \delta^*_{km}\delta^*_{nl} + n_m n_n \delta^*_{li}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_{13}(n_i n_j \delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + n_m n_n \delta^*_{lj}\delta^*_{ik}) + \\
& + A^{ab}_{14}(n_i n_j \delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + n_m n_n \delta^*_{lk}\delta^*_{ij}) + \\
& + A^{ab}_{15}(n_i n_n \delta^*_{km}\delta^*_{jl} + n_m n_j \delta^*_{li}\delta^*_{nk}) + A^{ab}_{16}(n_i n_n \delta^*_{ml}\delta^*_{jk} + n_m n_j \delta^*_{ik}\delta^*_{nl}) + \\
& + A^{ab}_{17}(n_i n_n \delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + n_m n_j \delta^*_{kl}\delta^*_{ni}) + \\
& + A^{ab}_{18} n_i n_m \delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + A^{ab}_{19} n_i n_m \delta^*_{nj}\delta^*_{kl} + A^{ab}_{20} n_i n_m \delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + \\
& + A^{ab}_{21} n_j n_n \delta^*_{ik}\delta^*_{ml} + A^{ab}_{22} n_j n_n \delta^*_{im}\delta^*_{kl} + A^{ab}_{23} n_j n_n \delta^*_{il}\delta^*_{km} + A^{ab}_{24}\delta^*_{kl} n_i n_j n_m n_n ,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

здесь модули A^{ab}_i $(i = 1,\ldots,24)$ являются физическими параметрами среды и определяются экспериментально.

С учетом (7), (9) и (10), (11), (12) получены уравнения закона Гука для силовых факторов на поверхности среды, которые отличаются от сформулированных в [4] наличием кривизн в адгезионных напряжениях и наличием дисторсий в адгезионных моментных напряжениях:

$$
\begin{aligned}
a^1_{ij} &= A^{11}_{ijmn} R_{m,n} + A^{12}_{ijmn} D^2_{mn} + A^{11}_{ijmnl} R_{m,nl} + A^{12}_{ijmnl} D^2_{mn,l} \\
a^1_{ijk} &= A^{11}_{mnijk} R_{m,n} + A^{21}_{mnijk} D^2_{mn} + A^{11}_{ijkmnl} R_{m,nl} + A^{12}_{ijkmnl} D^2_{mn,l} \\
a^2_{ij} &= A^{21}_{ijmn} R_{m,n} + A^{22}_{ijmn} D^2_{mn} + A^{21}_{ijmnl} R_{m,nl} + A^{22}_{ijmnl} D^2_{mn,l} \\
a^2_{ijk} &= A^{12}_{mnijk} R_{m,n} + A^{22}_{mnijk} D^2_{mn} + A^{21}_{ijkmnl} R_{m,nl} + A^{22}_{ijkmnl} D^2_{mn,l} .
\end{aligned}
\tag{13}
$$

С использованием формулировки плотностей потенциальной энергии (2)–(5) был построен лагранжиан теории (1), который с учетом введенных формулой (11) тензоров адгезионных модулей пятого ранга дополняет потенциальную энергию адгезии билинейными относительно кривизн и дисторсий слагаемыми, и представлен в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
L = A - \frac{1}{2}\iiint (C^{ab}_{ijmn} D^a_{ij} D^b_{mn} + C^{ab}_{ijkmnl} D^a_{ijk} D^b_{mnl}) dV - \\
- \frac{1}{2}\oiint (A^{ab}_{ijmn} D^a_{ij} D^b_{mn} + 2A^{ab}_{ijmnl} D^a_{ij} D^b_{mnl} + A^{ab}_{ijkmnl} D^a_{ijk} D^b_{mnl}) dF - \frac{1}{2}\sum \oint \ \ldots
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Здесь в целях лаконичности не выписаны потенциальные энергии ребер поверхности и их угловых точек.

Единая природа адгезионных и «реберных» взаимодействий и их несводимость друг к другу

Все тензоры адгезионных модулей шестого ранга участвуют в свертках с кривизнами двух сортов, и общим свойством всех сверток является то, что все кривизны интегрируемы, т.е. являются градиентами соответствующих дисторсий. Представляется, что это свойство следует использовать явно.

Для простоты рассмотрим тело в виде параллелепипеда. Кусочно-гладкая поверхность тела такой формы представляет собой плоскости, на которых орт единичной нормали не зависит от координат. Соответственно, каждая гладкая поверхность ограничена прямоугольным контуром из четырех ребер, а каждый контур имеет четыре угловые точки. Ниже приводятся формулировки двух теорем, позволяющих существенно сократить количество адгезионных модулей. Их доказательства в силу относительной простоты и из соображений лаконичности не приводятся.

Теорема-1. В плотность потенциальной энергии адгезии $A^{ab}_{ijkmnl} D^a_{ijk} D^b_{mnl} / 2$ входят только те модули, которые фигурируют множителями при базисных тензорах, симметричных при перестановке третьего и шестого индексов. Остальные модули входят в ту часть плотности потенциальной энергии кривизн, которая может быть преобразована в билинейную часть плотности потенциальной энергии ребер $(A^{ab}_{ijkmnl} - A^{ab}_{ijlmnk})\nu_l D^a_{ij,k} D^b_{mn}/2$, зависящую от кривизн и дисторсий разных сортов.

Благодаря этой теореме, структура тензоров A^{ab}_{ijkmnl} становится более простой, количество базисных тензоров сокращается с двадцати четырех до шестнадцати. Соответственно сокращается и количество существенных модулей.

Теорема-2. В плотность потенциальной энергии адгезии $A^{ab}_{ijmnl} D^a_{ij} D^b_{mnl}$ входят только те модули, которые фигурируют множителями при базисных тензорах, антисимметричных при перестановке пар индексов ij и mn, при одновременной перестановке индексов сортности. Остальные модули входят в ту часть плотности потенциальной энергии адгезии, которая может быть преобразована в часть плотности потенциальной энергии ребер $A^{ab}_{ijmnl}\nu_l D^a_{ij} D^b_{mn}$, зависящую от дисторсий разных сортов.

Общее количество адгезионных модулей, входящих в четыре тензора пятого ранга, сокращается, благодаря Теореме-2, в два раза.

Теория градиентной адгезии идеальной (бездефектной) поверхности

Если для дефектной среды тензоры адгезионных модулей A^{22}_{ijmnl} и A^{22}_{ijkmnl}, по-видимому, далее не поддаются упрощению, то для тензоров модулей идеальной (бездефектной) среды A^{11}_{ijmnl} и A^{11}_{ijkmnl} есть еще дополнительные возможности теоретически обоснованных упрощений. Тензор A^{11}_{ijkmnl} входит в выражение потенциальной энергии в свертке с тензором шестого ранга $D^1_{ijk} D^1_{mnl}$. В соответствии с (6) он может быть представлен в виде $R_{i,jk} R_{m,nl}$, из которого следует дополнительная симметрия при перестановке индексов внутри пар jk и nl. Отсюда следует, что тензор адгезионных модулей A^{11}_{ijkmnl} должен обладать дополнительными свойствами: $A^{11}_{ijkmnl}Э_{jkr} = 0$ и $A^{11}_{ijkmnl}Э_{nlr} = 0$. С учетом этих свойств симметрии получим:

$$\begin{cases} A^{11}_{2} = A^{11}_{1} \\ A^{11}_{3} = A^{11}_{1} \end{cases} \quad \begin{cases} A^{11}_{5} = A^{11}_{1} \\ A^{11}_{7} = A^{11}_{1} \end{cases} \quad \begin{cases} A^{11}_{6} = A^{11}_{4} \\ A^{11}_{10} = A^{11}_{8} \end{cases} \quad \begin{cases} A^{11}_{11} = A^{11}_{9} \\ A^{11}_{14} = A^{11}_{12} \end{cases}. \tag{15}$$

Тензор A^{11}_{ijkmnl} приобретает вид:

$$\begin{aligned} A^{11}_{ijkmnl} = {} & A^{11}_{1}(\delta^*_{ij}\delta^*_{km}\delta^*_{nl} + \delta^*_{mn}\delta^*_{li}\delta^*_{jk} + \delta^*_{ij}\delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{mn}\delta^*_{lj}\delta^*_{ik} + \delta^*_{ij}\delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + \delta^*_{ik}\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + \\ & + \delta^*_{ml}\delta^*_{ni}\delta^*_{jk} + \delta^*_{in}\delta^*_{km}\delta^*_{jl} + \delta^*_{mj}\delta^*_{li}\delta^*_{nk} + \delta^*_{in}\delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + \delta^*_{ik}\delta^*_{jn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{il}\delta^*_{km}\delta^*_{nj}) + \\ & + A^{11}_{4}(\delta^*_{im}\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + \delta^*_{im}\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + \delta^*_{im}\delta^*_{nj}\delta^*_{kl}) + \\ & + A^{11}_{8}(n_i n_j \delta^*_{km}\delta^*_{nl} + n_m n_n \delta^*_{li}\delta^*_{jk} + n_i n_j \delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + n_m n_n \delta^*_{lj}\delta^*_{ik} + n_i n_j \delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + n_m n_n \delta^*_{lk}\delta^*_{ij}) + \\ & + A^{11}_{9}(n_i n_n \delta^*_{km}\delta^*_{jl} + n_m n_j \delta^*_{li}\delta^*_{nk} + n_i n_n \delta^*_{ml}\delta^*_{jk} + n_m n_j \delta^*_{ik}\delta^*_{nl} + n_i n_n \delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + n_m n_j \delta^*_{kl}\delta^*_{ni}) + \\ & + A^{11}_{12}(n_i n_m \delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + n_i n_m \delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + n_i n_m \delta^*_{nj}\delta^*_{kl}) + \\ & + A^{11}_{13}(n_j n_n \delta^*_{ik}\delta^*_{ml} + n_j n_n \delta^*_{il}\delta^*_{km}) + A^{11}_{15} n_j n_n \delta^*_{im}\delta^*_{kl} + A^{11}_{16}\delta^*_{kl} n_i n_j n_m n_n. \end{aligned} \tag{16}$$

Количество модулей сокращается с шестнадцати до восьми.

Тензор A^{11}_{ijmnl} входит в выражение потенциальной энергии в свертке с тензором пятого ранга $D^1_{ij}D^1_{mnl}$. В соответствии с (6) он может быть представлен в виде $R_{i,j}R_{m,nl}$, из которого следует дополнительная симметрия при перестановке индексов внутри пары nl. Отсюда следует, что тензор адгезионных модулей A^{11}_{ijmnl} должен обладать дополнительным свойством $A^{11}_{ijmnl}Э_{nlr} = 0$. С учетом этих свойств симметрии тензор A^{11}_{ijmnl} приобретает более простую структуру и, соответственно, количество модулей сокращается с восьми до пяти:

$$A_{ijmnl}^{11} = G_1^{11}(n_i\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} - n_m\delta^*_{jl}\delta^*_{in} + n_i\delta^*_{jn}\delta^*_{lm} - n_m\delta^*_{jn}\delta^*_{li} + n_i\delta^*_{jl}\delta^*_{mn} - n_m\delta^*_{ji}\delta^*_{nl}) +$$
$$+ G_4^{11}(n_j\delta^*_{im}\delta^*_{nl} - n_n\delta^*_{jl}\delta^*_{mi}) +$$
$$+ G_5^{11}(n_j\delta^*_{in}\delta^*_{lm} - n_n\delta^*_{jm}\delta^*_{il} + n_j\delta^*_{il}\delta^*_{mn} - n_n\delta^*_{ji}\delta^*_{lm}) + \quad (17)$$
$$+ G_{13}^{11}(\delta^*_{il}n_j n_m n_n - \delta^*_{ml}n_i n_j n_n) +$$
$$+ G_{14}^{11}(\delta^*_{jl}n_i n_m n_n - \delta^*_{nl}n_i n_j n_m).$$

Для сверхтонких пленок и идеальных 2D-структур типа графена, когда изменяемостью по толщине можно пренебречь, имеется возможность предложить еще одно упрощение. А именно, для таких объектов можно считать, что потенциальная энергия адгезии не содержит нормальных к поверхности производных от вектора перемещений. Эта гипотеза эквивалентна следующему требованию к свойствам тензоров модулей:

$$\begin{cases} A_{ijkmnl}^{11} n_j = 0 \\ A_{ijkmnl}^{11} n_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ijmnl}^{11} n_j = 0 \\ A_{ijmnl}^{11} n_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ijmn}^{11} n_j = 0 \\ A_{ijmn}^{11} n_n = 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Из (18) для A_{ijkmnl}^{11} следует:

$$A_{ijkmnl}^{11} = A_1^{11}(\delta^*_{ij}\delta^*_{km}\delta^*_{nl} + \delta^*_{mn}\delta^*_{li}\delta^*_{jk} + \delta^*_{ij}\delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{mn}\delta^*_{lj}\delta^*_{ik} +$$
$$+ \delta^*_{ij}\delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + \delta^*_{ik}\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + \delta^*_{ml}\delta^*_{ni}\delta^*_{jk} + \delta^*_{in}\delta^*_{km}\delta^*_{jl} +$$
$$+ \delta^*_{mj}\delta^*_{li}\delta^*_{nk} + \delta^*_{in}\delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + \delta^*_{ik}\delta^*_{jn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{il}\delta^*_{km}\delta^*_{nj}) + \quad (19)$$
$$+ A_4^{11}(\delta^*_{im}\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + \delta^*_{im}\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + \delta^*_{im}\delta^*_{nj}\delta^*_{kl}) +$$
$$+ A_{12}^{11}(n_i n_m\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + n_i n_m\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + n_i n_m\delta^*_{nj}\delta^*_{kl}).$$

Из (18) для A_{ijmnl}^{11} следует:

$$A_{ijmnl}^{11} = G_1^{11}(n_i\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} - n_m\delta^*_{jl}\delta^*_{in} + n_i\delta^*_{jn}\delta^*_{lm} - n_m\delta^*_{jn}\delta^*_{li} + n_i\delta^*_{jl}\delta^*_{mn} - n_m\delta^*_{ji}\delta^*_{nl}). \quad (20)$$

Из (18) для A_{ijmn}^{11} следует:

$$A_{ijmn}^{11} = \lambda^{11F}\delta^*_{ij}\delta^*_{mn} + (\mu^{11F} + \chi^{11F})\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + (\mu^{11F} - \chi^{11F})\delta^*_{in}\delta^*_{jm} + \delta^{ab}n_i n_m\delta^*_{jn}. \quad (21)$$

Из (13) следует определение «классических» адгезионных напряжений:

$$a_{ij} = a_{ij}^1 - a_{ijk,k}^1 =$$
$$= (A_{ijmn}^{11} R_{m,n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{11} R_{m,nl} + A_{ijmnl}^{12} D_{mn,l}^2) -$$
$$- (A_{mnijk}^{11} R_{m,n} + A_{mnijk}^{21} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{11} R_{m,nl} + A_{ijkmnl}^{12} D_{mn,l}^2)_{,k}.$$

Для бездефектной среды $D_{mn}^2 \equiv 0$ и оно приобретает вид:

$$a_{ij} = a_{ij}^1 - a_{ijk,k}^1 = A_{ijmn}^{11} R_{m,n} - A_{ijkmnl}^{11} R_{m,nlk}.$$

Вводя гипотезу «парности «классических» адгезионных напряжений» $a_{ij} Э_{ijr} n_r = 0$, можно получить:

$$\begin{aligned} & A_{ijkmnl}^{11} Э_{ijr} n_r = (A_1^{11} - A_4^{11})(\delta_{nl}^* Э_{kmr} n_r + \delta_{nk}^* Э_{lmr} n_r + \delta_{lk}^* Э_{nmr} n_r) = 0, \\ & A_{ijmn}^{11} Э_{ijr} n_r = 2\chi^{11F} Э_{mnr} n_r = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, в приложении к тонким пленкам, в том числе и клеевым, теория градиентной адгезии будет содержать всего шесть адгезионных модулей: три – в тензоре A_{ijmn}^{11}, один – в тензоре A_{ijmnl}^{11} и два – в тензоре A_{ijkmnl}^{11}.

Хочется надеяться, что благодаря своей относительной простоте эта теория будет востребована в инженерных приложениях.

Заключение

Развитая здесь теория сред с полями сохраняющихся дислокаций позволяет получить целый ряд пусть пока не количественных, а качественных результатов, проясняющих свойства дефектных и идеальных (бездефектных) сред. К новым результатам этой работы можно отнести уточнение структуры потенциальной энергии адгезии и существенное сокращение количества неклассических адгезионных модулей в теории градиентной адгезии. Установлена единая природа адгезионных и реберных взаимодействий и их несводимость друг к другу. Дано теоретическое обоснование более «бедной» структуры тензоров адгезионных модулей в градиентных теориях адгезии. Предложена прикладная теория градиентной адгезии, пригодная для инженерных приложений.

Список литературы

1. **Белов П.А., Лурье С.А.** // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т.14. №3. С. 519–536.
2. **Белов П.А., Лурье С.А.** // Прикладная математика и механика. 2009. Т.73. №5. С. 833–848.
3. **Лурье С.А., Белов П.А.** // Сб. тр. конф. «Современные проблемы механики гетерогенных сред». М.: ИРПИМ РАН, 2005. С. 235–268.
4. **Белов П.А.** //Композиты и наноструктуры. 2011. Т.3. №1. С.24–38.
5. **Mindlin R.D.** // Archive of Rational Mechanics and Analysis. 1964. N1. P. 51–78.
6. **Toupin R.A.** // Archive of Rational Mechanics and Analysis. 1964. N2. P. 85–112.
7. **Белов П.А., Лурье С.А.** // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 9. №4. С. 471–484.
8. **Белов П.А., Лурье С.А.** К общей геометрической теории дефектных сред // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. №6.